数理解析研究所講究録
368巻 1979年 99-115

Rank 1な半単純Lie群上のPaley-Wiener型の定理

慶応大.工. 河添 健

Rank 1な半単純Lie群G上で Paley-Wiener型の定理を考える。すなわち G上のcompactな台を持つ関数のFourier変換による像の特徴づけを行なう。以下の方法は O. Campoli [1] の方法と同様であるが、それを Harish-Chandra [5] において得られた Plancherel 公式及び Eisenstein 積分等を用いて、書き直す事により、結果の見通しを良くする。

1. 記号

Gを有限な中心を持つ連結半単純Lie群とする。今の所、Gの実rankは任意とする。Kをその最大compact部分群とし、θをこのKから誘導されるCartan involutionとする。$G=KA_0N_0$ をGの岩沢分解とする。以下、Lie環はドイツ小文字で表わし、$(\ )_c$, $(\ )^*$ でその複素化 及び 双対空間を表わす事とする。

$\tau=(\tau_1,\tau_2)$ を K の unitary な V 上での double 表現とする。ここで V は有限次元な Hilbert 空間であり，その内積を $(\ ,\ )$ で表わす。この時，G 上の V 値急減少関数からなる Schwartz space $\mathcal{C}(G,V)$ 及び その τ-spherical な要素，すなわち

(1.1) $\qquad f(k_1 x k_2)=\tau_1(k_1)f(x)\tau_2(k_2) \quad (k_1,k_2\in K,\ x\in G)$

を満たす要素全体からなる部分空間 $\mathcal{C}(G,\tau)$ が いつもの様に定義される。また ${}^{\circ}\mathcal{C}(G,\tau)$ を cusp forms の全体とする。以上の詳しい議論は Harish-Chandra [3] を参照されたい。$P=MAN$ を G の parabolic subgroup (psgp.) 及び その Langlands 分解とする。この時，この M に対しても $\mathcal{C}(M,V)$, $\mathcal{C}(M,\tau_M)$, ${}^{\circ}\mathcal{C}(M,\tau_M)$ が同様に定義される。ここで τ_M は τ の $K\cap M$ への制限である。また (G,A) に関する Weyl 群を W_A とし，$\mathfrak{a}^*$ を簡単のため $\mathfrak{F}_A$ と書く事にする。

Lie 群 L に対し，$\mathcal{E}(L)$, $\mathcal{E}_2(L)$ をその既約な unitary 表現の同値類の全体，及びその中の二乗可積分な表現に対応するもの全体とする。

2. $\mathcal{C}(G,\tau)$ の分解

この章では $\mathcal{C}(G,\tau)$ を G の Cartan 部分群の共役類に従って分解する事を考える。詳しい証明は Harish-Chandra

[5] を参照されたい。まず $P_1, P_2, \cdots, P_r$ を θ-不変な G の Cartan 部分群で，そのどの二つも G の元で共役でない最大なものとする。各 i $(1 \leq i \leq r)$ に対し，A_i を P_i の vector part，$P_i = M_i A_i N_i$ を A_i を split component にもつ G の psgp. とする。この時 N_i は適当に定めて良い。今 $\mathcal{C}(G,\tau)$ の部分空間 $\mathcal{C}_{A_i}(G,\tau)$ を次の様な条件を満たす $\mathcal{C}(G,\tau)$ の元 f の全体とする。

split component が A_i と K の元で共役でない任意の G の psgp. $Q = MAN$ に対して，$f^Q \sim 0$ となる。

ただし，ここで

(2.1) $$f^Q(ma) = \int_N f(man)\,dn \qquad (m \in M,\ a \in A)$$

であり，$f^Q \sim 0$ とは次の条件を満たす事である。

(2.2) $$\int_M (\phi(m), f^Q(ma))\,dm = 0 \qquad ({}^\forall \phi \in {}^\circ\mathcal{C}(M,\tau_M),$$

${}^\forall a \in A)$。この様に $\mathcal{C}_{A_i}(G,\tau)$ を定義すれば，この空間は $\mathcal{C}(G,\tau)$ の閉部分空間となり，かつ $\mathcal{C}(G,\tau)$ は次の様に分解される。

(2.3) $$\mathcal{C}(G,\tau) = \mathcal{C}_{A_1}(G,\tau) \oplus \mathcal{C}_{A_2}(G,\tau) \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}_{A_r}(G,\tau)$$

ここで $A_i = \{1\}$ の時，すなわち P_i が compact Cartan 部分群となる時，$\mathcal{C}_{A_i}(G,\tau)$ は ${}^\circ\mathcal{C}(G,\tau)$ と一致する事に注意しておく。

3. Fourier 変換

$P_i = M_iA_iN_i$ $(1 \le i \le r)$ を一つ固定し，以下 $P = MAN$ と書く事にする。この章では2章で定義した空間 $\mathcal{C}_A(G:\tau)$ 上で Fourier 変換を定義し，その逆変換等を求める。以下簡単のため W_A, $\mathcal{F}_A$ を W, $\mathcal{F}$ と書く事にする。まず A が θ-不変な Cartan 部分群の vector part である事から $\mathcal{E}_2(M) \neq \phi$ となる事に注意する。$L = \mathcal{C}(M, \tau_M)$ とすれば，良く知られている様に L は有限次元であり，$L = \sum_{\omega \in \mathcal{E}_2(M)} L(\omega)$ と直和分解される。ただし $L(\omega) = L \cap (\mathcal{Y}_\omega \otimes V)$ であり，$\mathcal{Y}_\omega$ は ω の matrix coefficients で張られる $L^2(M)$ の中の最小の閉部分空間である。今，この直和分解を次の様に書く事にする。

(3.1) $$L = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s \in W - W(\omega_j)} L(s\omega_j)$$

ただし，$W(\omega_j) = \{ s \in W \,;\, s\omega_j = \omega_j \}$ $(1 \le j \le m)$ であり $s\omega_j$ は s の K での代表元を k_s，ω の元を π_ω とした時 $\pi_\omega(k_s^{-1} m k_s)$ $(m \in M)$ で定義される M の表現の同値類である。ここで $L(\omega_j)$ $(1 \le j \le m)$ の正規直交基底を

(3.2) $$\{ \phi_i^j \,;\, 1 \le i \le n_j = \dim L(\omega_j) \}$$

とする。また $f \in \mathcal{C}_A(G:\tau)$, $\phi \in L$, $\nu \in \mathcal{F}$ に対し

(3.3) $$\hat{f}(\phi, \nu) = (c^2\gamma)^{-1} (f, E(P:\phi:\nu:\cdot))$$

と定義する。ここで c, γ は P に従属して定まる定数

であり，Harish-Chandra[5] §2, §11 と同じ意味である。この時，ϕ を固定すれば $\hat{f}(\phi,\nu)$ は ν について，普通の意味での急減少関数となる事に注意する。すなわち $\mathfrak{F}$ 上の急減少関数からなる空間 $\mathcal{C}(\mathfrak{F})$ の元となる。

以上の準備のもとで，$\mathcal{C}_A(G,\tau)$ 上の Fourier 変換 E_A を次の様に定義する。

$$E_A(f) = (\hat{f}(\phi^j_i,\nu) \;;\; 1\le i\le n_j,\ 1\le j\le m)$$

$$= (\hat{f}(\phi^1_1,\nu),\cdots,\hat{f}(\phi^1_{n_1},\nu),\hat{f}(\phi^2_1,\nu),\cdots,\hat{f}(\phi^2_{n_2},\nu),\cdots,\hat{f}(\phi^m_1,\nu),\cdots,\hat{f}(\phi^m_{n_m},\nu)) \tag{3.4}$$

$(f\in\mathcal{C}_A(G,\tau),\ \nu\in\mathfrak{F})$。ここで $n=n_A$ を $\sum_{j=1}^{m} n_j$ と定義すれば，明らかに $E_A(f)$ は $\mathcal{C}(\mathfrak{F})^n$ の元である。

次に，この Fourier 変換の像となる空間 $\mathcal{C}(\mathfrak{F})^n_*$ を定義する。$\mathcal{C}(\mathfrak{F})^n$ の元 α に対して，その n 個の成分を $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 個づつ区切った形を考える。すなわち

$$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m) \quad (\alpha_j\in\mathcal{C}(\mathfrak{F})^{n_j}\ (1\le j\le m)) \tag{3.5}$$

と書ける事に注意する。この時 $\mathcal{C}(\mathfrak{F})^n$ の部分空間 $\mathcal{C}(\mathfrak{F})^n_*$ を次の様な条件を満たす $\mathcal{C}(\mathfrak{F})^n$ の元 α の全体とする。

α を (3.5) の様に書いた時，各 j $(1\le j\le m)$ に対して

$$\alpha_j(s\nu)^t = \overline{{}^0C_{P|P}(s:s^{-1}\nu)}\,\alpha_j(\nu)^t \tag{3.6}$$

$(\forall s\in W(\omega_j),\ \forall\nu\in\mathfrak{F})$ を満たす。

ここで $\alpha_j(\ )^t$ は n_j 次元 vector $\alpha_j(\ )$ の転置を表わす。

また ${}^{\circ}c_{P|P}(s:s^{-1}\nu)$ は $L(\omega_j)$ から $L(s\omega_j)$ 上への unitary 作用素であり（定義は Harish-Chandra [5] P152 を参照）今，これを (3.2) の基底に従って行列とみなしている。 ―――― はその複素共役を意味する。

以上の様にして 写像 E_A，空間 $\mathcal{C}(\mathfrak{F})^n_*$ を定義した時，次の定理が成立する。

定理 1. 写像 E_A は $\mathcal{C}_A(G,\tau)$ から $\mathcal{C}(\mathfrak{F})^n_*$ 上への位相同型を与え，$C_A(G,\tau)$ の元 f に対し，その逆変換は次の形で与えられる。

(3.7)
$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} |W(\omega_j)|^{-1} \sum_{i=1}^{n_j} \int_{\mathfrak{F}} \mu(\omega_j,\nu) \times E(P:\phi^j_i:\nu:x)\,\hat{f}(\phi^j_i,\nu)\,d\nu$$

ただし，$|W(\ )|$ は $W(\ )$ の要素の個数であり，$d\nu$ は $\mathfrak{F}$ 上の Euclidean 測度である。 $\mu(\omega,\nu)$ については Harish-Chandra [5] §13 を参照。

証明： 単射となる事は次の様にして容易に示される。$C_A(G,\tau)$ の元 f に対して． $E_A(f)=0 \Rightarrow (f.\ E(P:\phi:\nu:\cdot))=0$ $\forall \phi \in L \iff f^P \sim 0 \Rightarrow f$ が $\mathcal{C}_A(G,\tau)$ の元である事から G の任意の psgp. Q に対して $f^Q \sim 0 \Rightarrow f=0$ （cf. Harish-Chandra [3] Lemma 20.1）。 また全射となる事

は $\alpha \in \mathcal{C}(\mathfrak{F})^n_*$ に対して (3.7) の $\hat{f}(\Phi_{\sigma_i}, \nu)$ の部分を α の成分で置き換える事により，G 上の関数を定義し，それを実際に E_A で写す事によって示される。この時定義される G 上の関数が $\mathcal{C}_A(G.\tau)$ の元となる事，及び，写像 E_A，E_A^{-1} の連続性に関しては，Harish-Chandra [4]，[5] において，調べられている。この様にして定理 1 は証明される。

（注意 1） A と A_k $(1 \leq k \leq r)$ が K の元で共役でなければ $\mathcal{C}_{A_k}(G.\tau)$ の元 f に対し $E_A(f) = 0$ となる事が容易に示される。よって $\mathcal{C}(G.\tau)$ の分解 (2.3) に注意すれば，写像 E_A は $\mathcal{C}(G.\tau)$ 全体に拡げる事ができる。以下，この拡張したものも同じ E_A で表わす事とする。

（注意 2） n_{A_i} を n_i，$\mathfrak{F}_{A_i}$ を $\mathfrak{F}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ と書けば，定理 1 は次の図の様に書く事ができる。

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{C}(G.\tau) = \mathcal{C}_{A_1}(G.\tau) & \oplus & \mathcal{C}_{A_2}(G.\tau) & \oplus & \cdots & \oplus & \mathcal{C}_{A_r}(G.\tau) \\
\downarrow \wr \; E_{A_1} & & \downarrow \wr \; E_{A_2} & & & & \downarrow \wr \; E_{A_r} \\
\mathcal{C}(\mathfrak{F}_1)^{(n_1)}_* & \oplus & \mathcal{C}(\mathfrak{F}_2)^{(n_2)}_* & \oplus & \cdots & \oplus & \mathcal{C}(\mathfrak{F}_r)^{(n_r)}_*
\end{array}
$$

4. Paley-Wiener 型の定理.

以下，この章では G の実 rank を 1 と仮定する。また G の最小 psgp. を $P = MAN$ $(\dim A = 1)$ と書き，前と

同様に　$\mathfrak{F}=\mathfrak{N}^*$，$n=n_A$，$W=W_A$　とする。　今，$\mathcal{C}(\mathfrak{F})^n_*$ の部分空間 $\mathcal{H}(\mathfrak{F})^n_*$ を　$\mathcal{C}(\mathfrak{F})^n_*$ の元

(4.1)
$$\alpha=(\alpha^1_1(\nu),\cdots,\alpha^1_{n_1}(\nu),\alpha^2_1(\nu),\cdots,\alpha^2_{n_2}(\nu),\cdots\cdots,\alpha^m_1(\nu),\cdots,\alpha^m_{n_m}(\nu))$$

で次の２つの条件を満たすものとする。

(i)　各 α^j_i $(1\leq i\leq n_j,\ 1\leq j\leq m)$ は $\mathfrak{F}_c$ 上の exponential type な正則関数に拡張できる。

(ii)　もし Eisenstein 積分が

(4.2)
$$\sum_{i,j,t,m} C_{ijtm}\left(\frac{d^m}{d\nu^m}\right)\Big|_{\nu=\nu_t} E(P:\phi^j_i:\nu:x)=0$$

$(C_{ijtm}\in\mathbb{C})$ なる関係式を満たしているとすれば α^j_i $(1\leq i\leq n_j,\ 1\leq j\leq m)$ は同じ関係式

(4.3)
$$\sum_{i,j,t,m} C_{ijtm}\left(\frac{d^m}{d\nu^m}\right)\Big|_{\nu=\nu_t}\alpha^j_i(\nu)=0$$

を満たす。　以下，微分作用素 $\left(\frac{d^m}{d\nu^m}\right)\Big|_{\nu=\nu_t}$ を $D(m,t)$ と略す事とする。

この様に $\mathcal{H}(\mathfrak{F})^n_*$ を定義すれば，次の定理が成立する。

<u>定理２.</u>　$\mathcal{H}(\mathfrak{F})^n_*$ の元 α に対し，ある $C^\infty_c(G,\tau)$ の元 F が存在し，

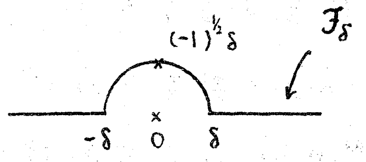
(4.4)
$$E_A(F)=\alpha$$

を満たす。

証明： 簡単のため $i=j=1$, $W(\omega_j)=W$ の時を示す。一般の場合も同様の方法によって示される。証明の前に写像 E_A の逆変換に関して一般論を行なう事にする。まず $\mathcal{C}_A(G:\tau)$ の元 f が定理1により，次の形に書かれる事に注意する。

(4.5) $$f(x) = c\int_{\mathfrak{F}} \mu(\omega,\nu)\,E(P:\phi:\nu:x)\,\hat{f}(\phi,\nu)\,d\nu$$

ここで，c は定数である。以下，積分記号の前の定数はそのつど変化するが，常に同じ記号 c で表わす事にする。今，$\hat{f}(\phi,\nu)$ が $\mathfrak{F}_c$ 上の正則関数に拡張されると仮定する。すると $E(P:\phi:\nu:x)\,\hat{f}(\phi,\nu)$ は $\mathfrak{F}_c$ 上の正則関数となる。また，一方 $\mu(\omega,\nu)$ は十分小さな正数 δ に対し，$\mathfrak{F}_c(\delta) = \{\nu\in\mathfrak{F}_c : |Im(\nu)|\leqslant\delta\}$ で正則である事が知られている。（Harish-chandra[5] 定理25.1） よって以上の事から，Cauchy の積分定理を用いる事により (4.5) の積分路 $\mathfrak{F}$ を，右図の様な $\mathfrak{F}_\delta$ へと変える事が可能である。



この様にして積分路が原点を通らなくなった事により，その上で Eisenstein 積分の Harish-Chandra 展開を適用する事が可能となる。この展開の定義，記号に関しては，G. Warner [9] 等を参照されたい。すなわち $A^+ = \exp\mathfrak{a}^+$ （$\mathfrak{a}^+$ は正の Weyl chamber）

の元 a に対し，(4.5) の $\mathfrak{F}$ を $\mathfrak{F}_\delta$ に変えた式より

(4.6) $$f(a) = c\int_{\mathfrak{F}_\delta} \mu(w,\nu)\sum_{s\in W}\Phi(s\nu:a)C_{P|P}(s:\nu)\phi(1)\hat{f}(\phi,\nu)\,d\nu$$

と書ける事がわかる。ここで $s\in W$, $\nu\in\mathfrak{F}_\delta$ に対し

(4.7) $$\mu(w\cdot\nu)C_{P|P}(s:\nu)^{*}C_{P|P}(s:\nu) = c(A)^2 \quad (\text{定数})$$

なる関係式 (cf. Harish-Chandra [5] §17) 及び，ν を $s^{-1}\nu$ に変える変数変換を行なえば (4.6) 式は

(4.8) $$c\sum_{s\in W}\int_{s(\mathfrak{F}_\delta)}\Phi(\nu:a)\,C_{P|P}(s:s^{-1}\nu)^{*-1}\phi(1)\hat{f}(\phi,s^{-1}\nu)\,d\nu$$

となる。ここでさらに $s\in W$, $\nu\in\mathfrak{F}_\delta$ に対し，

(4.9) $$C_{P|P}(s:s^{-1}\nu) = C_{P|P}(1:\nu)^{\circ}C_{P|P}(s:s^{-1}\nu)$$

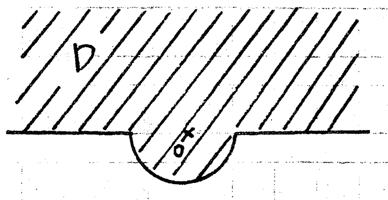
なる関係式 (cf. Harish-Chandra [5] §17) 及び (3.6) の関係式を用いる事により (4.8) 式は

(4.10) $$c\sum_{s\in W}\int_{s(\mathfrak{F}_\delta)}\Phi(\nu:a)\,C_{P|P}(1:\nu)^{*-1}\phi(1)\hat{f}(\phi,\nu)\,d\nu$$

となる事がわかる。すなわち，$\mathcal{C}_A(G,\tau)$ の元 f が，$\hat{f}(\phi,\nu)$ が $\mathfrak{F}_c$ 上の正則関数に拡張できるという条件の元で，(4.10) 式が成立する事がわかった。

以上の結果を用いて，$\mathcal{H}(\mathfrak{F})^{\sim}_{*}$ の元 α に対し (4.4) を満たす $C_c^\infty(G,\tau)$ の元 F を構成する。次に示す様な各段階を経て，構成する。

(i) $\Phi(\nu:a)C_{P|P}(1:\nu)^{*-1}\phi(1)$ が右図で示される領域 D で有限個の極をもつ事に注意する。今，



これらを V_t $(1 \leq t \leq T < \infty)$ とし，その位数を M_t とする。

(ii) $\{D(m_t, t)E(p:\phi:v:x)\ ;\ 1 \leq m_t \leq M_t - 1,\ 1 \leq t \leq T\}$ なる有限集合を考える。この時各 $D(m_t,t)E(p:\phi:v:x)$ が G 上の関数として実解析関数である事に注意する。今，この部分集合で，各要素が線型独立な最大なものを $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$ とする。ここでこれらが

$$(4.11)\qquad \begin{aligned} e_p &= D(m_p, p)E(p:\phi:v:\cdot) \qquad (1 \leq p \leq r) \\ D(m_t,t)E(p:\phi:v:\cdot) &= \sum_{p=1}^{r} c_p(m_t,t)\, e_p \end{aligned}$$

と書けているものとして一般性を失なわない。

(iii) 次に $C_c^\infty(G, \tau)$ の元 h_p $(1 \leq p \leq r)$ を次の関係式を満たす様に取る。（各 e_p が実解析関数である事に注意。）

$$(4.12)\qquad (h_p, e_q) = \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & p \neq q \end{cases} \qquad (1 \leq p, q \leq r)$$

(iv) ここで $\mathcal{H}(\mathfrak{f})^n_*$ の元 α に対し，

$$(4.13)\qquad G(x) = E_A^{-1}(\alpha)(x) - \sum_{p=1}^{r} \{D(m_p, p)\alpha(v)\} \cdot h_p^1(x) \qquad (x \in G)$$

とおく。ただし $h_p^1 = E_A^{-1}(E_A(h_p))$ $(1 \leq p \leq r)$，すなわち h_p の principal part である。以下，(4.13) 式の $\{\ \}$ の中を A_p と書く事にする。この時，この $G(x)$ は次の三つの性質を満たす事に注意する。

(a) $G(x)$ は $\mathcal{C}_A(G, \tau)$ の元である。

この事は $G(x)$ の定義式，E_A の定義より明らかである。

(b) $\hat{G}(\phi.\nu)$ は $\mathfrak{F}_c$ 上の exponential type な正則関数へ拡張できる。

(∵) $\hat{G}(\phi.\nu)=\alpha(\nu)-\sum_{p=1}^{r} A_p\cdot \hat{h}_p^1(\phi.\nu)$ となる事に注意する。この時 $\alpha(\nu)$ が上の性質を満たす事は $\mathcal{H}(\mathfrak{F})^n_*$ の元である事より明らかである。一方 $\hat{h}_p^1$ はその定義から $\nu\in\mathfrak{F}$ に対し

$$\begin{aligned}\hat{h}_p^1(\phi.\nu) &= (h_p^1, E(P:\phi:\nu:\cdot)) \\ &= (h_p, E(P:\phi:\nu:\cdot))\end{aligned} \tag{4.14}$$

と書ける。ところで、この時 h_p が compact な台を持つ事により、$\hat{h}_p^1$ が上の性質を持つ事は容易に示される。故に (b) は成立する。

(c) $D(m_t,t)\,\hat{G}(\phi,\nu)=0$ $\quad(1\le m_t\le M_t-1,\ 1\le t\le T)$

(∵) $D(m_t,t)\,\hat{G}(\phi.\nu)=D(m_t,t)\,\alpha(\nu)-\sum_{p=1}^{r} A_p\cdot D(m_t,t)\,\hat{h}_p^1(\phi.\nu)$

となる事に注意する。まず h_p が compact な台を持つ事から、

$$\begin{aligned} & D(m_t.t)\,\hat{h}_p^1(\phi.\nu) \\ &= D(m_t.t)\,(h_p, E(p:\phi:\nu:\cdot)) \qquad ((4.14)\text{より}) \\ &= (h_p, D(m_t.t)E(p:\phi:\nu:\cdot)) \\ &= c_p(m_t.t) \qquad ((4.11)(4.12)\text{より})\end{aligned} \tag{4.15}$$

となる事がわかる。一方 α が $\mathcal{H}(\mathfrak{F})^n_*$ の元である事から、その関係式 (4.2) と (4.3) により、(4.11) を用いて

$$\begin{aligned} D(m_t.t)\,\alpha(\nu) &= \sum_{p=1}^{r} c_p(m_t.t)\,D(m_p.p)\,\alpha(\nu) \\ &= \sum_{p=1}^{r} c_p(m_t.t)\,A_p\end{aligned} \tag{4.16}$$

となる。 よって (4.15), (4.16) を初めの式に代入すれば, (C) が成立する事がわかる。

(v) (iv) の結果を用いて $G(x)$ が compact な台を持つ事を示す。 まず (iv) の (a), (b) より, 証明の初めの部分で述べた一般論が $G(x)$ に適用できる事がわかる。 すなわち, $a \in A^+$ に対し,

$$(4.17) \qquad G(a) = c \sum_{s \in W} \int_{s(\mathfrak{F}_s)} \Phi(\nu : a)\, c_{P|P}(1:\nu)^{*-1} \phi(1)\, \hat{G}(\phi, \nu)\, d\nu$$

と書ける。 この時, (i) により $\Phi(\nu : a)\, c_{P|P}(1:\nu)^{*-1}\phi(1)$ は $\nu = \nu_t$ で M_t 位の pole を持つ。 ところで 一方 (iv) の (c) により $\hat{G}(\phi, \nu)$ は $\nu = \nu_t$ で M_t 位の零点を持つ事がわかる。 よって 積分記号の中の関数は正則関数 (D で) である事がわかった。 次に $s(\mathfrak{F}_s)$ $(s \in W)$ なる積分路を任意の $\mathfrak{F}^+ = (\mathfrak{a}^+)^*$ の元 η に対し, $s(\mathfrak{F}_s) + \sqrt{-1}\eta$ とずらす事を考える。 この事は $\Phi(\nu : a)\, c_{P|P}(1:\nu)^{*-1}\phi(1)$ なる関数が ν に関し, その極から離れている所において, ν の多項式で押えられる事, 及び, $\hat{G}(\phi, \nu)$ が (iv) の (b) より exponential type な正則関数である事に注意すれば可能である。 次に Euclid 空間における Paley - Wiener の定理の証明と同様の方法, すなわち η の任意性から $\eta \to \infty$ とする事により, 十分大きな $R > 0$ に対し, $A_R^+ = \{ a \in A^+ ;\ \sigma(a) \geq R \}$ 上で

$$(4.18) \qquad G(a) = 0$$

となる事がわかる。（$\hat{G}(\phi, \nu)$ が exponential type である事に注意）ここで σ は G 上のノルムである。（cf. Harish-chandra [3] §10）以上の事から $G = K\, \mathcal{U}(A^+)\, K$ と書ける事，及び $G(x)$ が τ- spherical な関数である事に注意すれば $G(x)$ は compact な台をもつ事がわかる。

(vi) 最後に求める関数 F を

$$F(x) = G(x) + \sum_{p=1}^{r} A_p \cdot h_p(x) \qquad (x \in G) \tag{4.19}$$

と定義する。(v) 及び h_p $(1 \leq p \leq r)$ の取り方より，$F(x)$ が $C_c^\infty(G.\tau)$ の元である事は明らかである。一方，

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(E_A^{-1}(\alpha)(x) - \sum_{p=1}^{r} A_p \cdot h_p^1(x) \right) + \sum_{p=1}^{r} A_p \cdot h_p(x) \\ &= E_A^{-1}(\alpha)(x) + \sum_{p=1}^{r} A_p \cdot h_p^0(x) \end{aligned} \tag{4.20}$$

と書ける事に注意する。ここで，$h_p^0 = h_p - h_p^1$ $(1 \leq p \leq r)$ であり，これは $\mathscr{C}(G.\tau)$ に属する。よって，

$$\begin{aligned} E_A(F) &= E_A(E_A^{-1}(\alpha)) + 0 \\ &= \alpha \end{aligned} \tag{4.21}$$

となり求める関係式(4.4)を満す事がわかる。以上の事から求めていた $C_c^\infty(G.\tau)$ の元 F が構成された。（証明終り）

（注意 3）4 章において M が K に含まれる事から $\mathscr{C}(M, \tau_M)$ と $V^M = \{ v \in V \,;\, \tau_1(m) v = v\, \tau_2(m) \ (\forall m \in M) \}$ が同型となる事が容易にわかる。この V^M の基底を用いても同様の結果を得る。特に τ_1, τ_2 が自明な表現の場合は，S. Helgason

[6], R. Gangolli [2] の結果と一致し, τ_2 が自明, τ_1 が任意な表現の場合は S. Helgason [7] の結果と一致する。

(注意.4) 定理2の証明において $h_p \in C_c^\infty(G.\tau)$ $(1 \leq p \leq r)$ の support は e_q $(1 \leq q \leq r)$ が実解析関数である事に注意すれば, いくらでも小さく取る事が可能である。よってこの事から, $C_c^\infty(G.\tau)$ の元の support の大きさと, その Fourier 変換像の exponential type の関係が容易に得られる。また compact support を持つ cusp form は G が non-compact の時 0 に限る事に注意すれば, G が non-compact の時, compact な台をもつ $\mathcal{C}(G.\tau)$ の元はその principal part, すなわち $\mathcal{C}_A(G.\tau)$ 成分によって決定されてしまう事が容易にわかる。この事から定理2をより精密に必要十分条件の形に書き換える事ができる。これらの事に関しては, T. Kawazoe [8] を参照されたい。

(注意.5) G の rank を任意とした時の Paley - Wiener 型の定理については, 定理2と同様の形の定理が得られると考えられるが, 証明は未だなされていない。G の rank が1の場合には一変数の複素関数論の範囲ですむので, 比較的初等的な方法で証明が得られた。しかしこの方法をそのまま任意の rank の場合に適用する事は無理と思われる。特に h_p $(1 \leq p \leq r)$ を $C_c^\infty(G.\tau)$ から取って, 極を消す部分は拡張

できない。この様な事から rank を任意とした時には，別の型の証明方法が必要と思われる。ただし，Harish-chandra 展開及び Euclid 空間の場合と同様の証明方法を用いる部分はそのまま使われると思う。

最近，discrete series を non-unitary principal series の部分表現とみなし，その時の parameter と μ-関数の極との間にある種の関係を仮定すれば，良い結果，例えば極における留数が $\mathcal{C}_A(G,\tau)$（A は A_0 と共役でない。）に属するといった事がわかるが，その仮定の是非を考えると今だ前途多難である。

参考文献

[1] O. Campoli : The complex Fourier transform for rank-1 semisimple Lie groups. Thesis, Rutgers (1977)

[2] R. Gangolli : On the plancherel formula and Paley-Wiener theorem for spherical functions on semisimple Lie groups. Ann. Math., 93(2), 150-165 (1971)

[3] Harish-Chandra : Harmonic analysis on real reductive groups. I. J. Func. Anal., 19, 104-204 (1975)

[4] ———— : Ditto II. Inv. Math., 36, 1-55 (1976)

[5] ———— : Ditto III. Ann. Math., 104, 117-201 (1976)

[6] S. Helgason : An analogue of Paley-Wiener theorem for the Fourier transform on certain symmetric spaces. Math. Ann., 165, 297-308 (1965)

[7] ———— : A duality for symmetric spaces with applications to group representations. II. Adv. Math., 22, 187-219 (1976)

[8] T. Kawazoe : An analogue of Paley-Wiener theorem on rank 1 semisimple Lie groups II.

[9] G. Warner : Harmonic analysis on semisimple Lie groups II. Springer-Verlag 189 (1972).